9

Hipotez Testleri

Çalışma Biçimine İlişkin Olarak

- *Bu üniteyi kolayca anlayabilmeniz için Örnekleme ve İstatistiksel Tahminleme isimli üniteler özümsenmiş olmalı,*
- *Kavramlar ve bu kavramlar arasındaki ilişkiler dikkatle incelenmeli,*
- *Örnekler ve örnek çözümleri dikkatle incelenmeli, sorunlarla karşılaşılırsa kavramsal açıklamalara geri dönülmelidir.*

Amaçlar:

- *İstatistiksel hipotez ve istatistiksel hipotez testi kavramlarını açıklayabileceksiniz.*
- *Parametrik ve parametrik olmayan teknikler arasından seçim yaparken, dikkat edilecek kriterleri açıklayabileceksiniz.*
- *Bir istatistiksel test sürecinin aşamalarında, hangi işlemlerin yapılacağını sıralayabileceksiniz.*
- *Anakütle aritmetik ortalamasına ve anakütle oranına ilişkin hipotez testi uygulamalarını yapabileceksiniz.*

İçerik Haritası

GİRİŞ

Örnekleme teorisi, anakütle parametrelerinin tahminlenmesi yanında, istatistiksel hipotezlerin test edilmesine de imkan vermektedir. Yorumsal istatistikte geleneksel karar alma işlemi olarak hipotez testi, örneklem bilgilerinden yararlanarak bu örneklemin çekildiği anakütlenin bir ya da daha fazla parametresi hakkında yorum yapma konularını içerir. Burada, örneklem gözlem değerleri kullanılarak hesaplanan istatistiğin değeriyle, bu istatistiğin bilgi ürettiği parametrenin önceden belirlenmiş, bilinen değeri arasındaki farklılığın, istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığı belirlenir. Farklılık varsa, bu farklılığın öneminin, sıfır hipotezini reddetmek için yeterli olup olmadığına karar verilir. Eğer sözkonusu farklılık anlamlı bir farklılıksa sıfır hipotezi reddedilir, tersi durumda kabul edilir.

Genellikle, parametrenin önceden belirlenmiş, bilinen değerinin değişmediğinin ifade edildiği sıfır hipotezine ilişkin karar verebilmek için, örneklem bilgilerinin olasılığa dayanarak genelleştirilmesi gerekir. Bu durum, ilgilenilen parametre hakkında bilgi üreten istatistiğin örnekleme dağılımının bilinmesini gerektirir.

Bu ünitede; anakütle aritmetik ortalaması ve anakütle oranına ilişkin hipotezlerin test edilmesinde, olasılık ve örnekleme dağılımı kavramlarının, nasıl uygulanacağı gösterilmiştir. Bu amaçla ünitede, önce hipotez ve hipotez testi kavramları açıklanmış, sonra da bir hipotez testi sürecinin aşamaları sırasıyla açıklanarak, hipotez türleri hakkında bilgi verilmiştir. Daha sonra da tek anakütle aritmetik ortalamasına ve oranına ilişkin hipotez testleri, örnekler üzerinde, ayrıntılı bir şekilde açıklanmıştır.

İSTATİSTİKSEL HİPOTEZ VE İSTATİSTİKSEL HİPOTEZ TESTİ

AMAÇ 1 ***İstatistiksel hipotez ve istatistiksel hipotez testi kavramlarını açıklayabileceksiniz.***

F çimento fabrikası ürünlerini, üzerinde ortalama 50 kg. yazan torbalarla, pazarlamaktadır. Z inşaat firması, fabrika yetkililerine başvurarak, son alınan 100 torbalık bir partinin ortalamasının 47.5 kg. olduğunu bildirerek, zarara uğradığını öne sürmüş ve fabrika yetkililerinden açıklama istemiştir. Fabrika yetkilileri, eğer kendi ürünlerini kullanmaya devam ederlerse, başka partilerin ortalamasının 50 kg. dan fazla çıkabileceğini ve zaman içinde giderek farkın sıfırlanacağını belirterek, bilinçli bir eksik (ya da fazla) doldurmanın söz konusu olmadığını ifade etmişlerdir.

Fabrika yetkililerinin savunmalarında ne kadar haklı oldukları (ya da olmadıkları) istatistiksel tekniklerle araştırılabilir. Bu ünitede, benzer problemlerin çözümlerinde kullanılan teknikler, yeterli ve ayrıntılarıyla ele alınmıştır.

Genel olarak hipotez, karşılaşılan özel duruma ilişkin bir önermedir. İstatistiksel hipotez, bir araştırmada ilgilenilen bir ya da daha fazla parametrenin değeri hakkında ileri sürülen ve doğruluğu, geçerliliği bu parametre(ler) hakkında bilgi üreten istatistik(ler)den ve bu istatistik(ler)in örnekleme dağılımıyla ilgili bilgilerden yararlanarak araştırılabilen önermelerdir. İstatistiksel hipotezler bir ya da daha fazla anakütle parametre değeriyle ilgili olabilirler. İstatistiksel hipotezleri diğer hipotezlerden ayıran özellik, bu hipotezlerin bir frekans dağılımına ait olmasıdır. Bazı istatistiksel hipotez örnekleri aşağıda verilmiştir.

Hipotez, karşılaşılan özel durumu ilişkin bir önermedir.

İstatistiksel hipotez, herhangi bir ana kütle parametresine ilişkin olarak ileri sürülen ve doğruluğu olasılık kurallarıyla araştırılabilen önermedir.

Örnekler:

1) Günlük ortalama üretimi 750 kg. olan bir ilaç fabrikasında, uygulanan yeni üretim tekniği, ortalama üretimi artırmıştır.
2) Bir üretim sürecinde üretilen tereyağı paketleri ortalama 500 gr ağırlığındadır.
3) Bir yerleşim yerinde ikamet eden ailelerin %10'u alışverişlerini süper marketlerden yapmaktadır.

Anakütle parametreleri hakkındaki hipotezler (önermeler), parametre değer(ler)i hakkında, daha önceden bilinen bir düzey, standart bir değer ya da varsayımsal bir değer olabilir. Birinci örnekte, ilk ilaç üretim yönteminin ortalama üretim düzeyi olan 750 kg. bilinen bir değerdir. İkinci örnekteki tereyağı paketlerinin planlanan ağırlığı olan 500 gr. standart bir değerdir. Son örnekteki süper marketlerden alışveriş yapan ailelerin oranı olan %10 varsayımsal değerdir.

Bir istatistiksel hipotez, doğru ya da yanlış olabilir. Çünkü bu bir önermedir. Gerçeği öğrenebilmek için, anakütle parametresi   'nın değerini hesaplamak gerekir. Bu da tamsayım yapmayı gerektirir. Ancak, örnekleme yapmayı gerektiren nedenlerden dolayı bu, her zaman mümkün değildir. Bu durumda istatistiksel hipotezlerin geçerliliği ya da doğruluğu konusunda karar verebilmek için, bu hipotezlerin, tanımlanan anakütleden seçilen örneklemin gözlem değerlerinden hesaplanan örneklem istatistiğinden ($\hat{}$ 'dan), bu istatistiğin ($\hat{}$ 'nın) örnekleme dağılımının özelliklerinden yararlanarak test edilmesi gerekir. İstatistiksel hipotez testi, örneklem istatistiklerini kullanarak, bir hipotezin doğru olup olmadığını ortaya koymaya yönelik yapılan çalışmalardır. Yorumsal istatistikte hipotez testi, örneklem gözlem değerlerinden yararlanarak, bu örneklemin seçildiği anakütlenin durumu hakkında yorum yapmaktır.

Daha önceki ünitede de belirtildiği gibi, anakütleden rassal örneklem alınmış olsa bile, örneklem gözlemlerinden hesaplanan bir istatistiğin, bu istatistiğin bilgi ürettiği parametre hakkında ileri sürülen değere (${}_0$) eşit olması beklenemez. Yani örneklem istatistikleri, aynı hacimli farklı örneklemlerde farklı değerler alabildiği için $\hat{} - {}_0 > 0$, $\hat{} = {}_0 - 0$ ya da $\hat{} - {}_0 < 0$ gibi farklar olabilir. Bu nedenle, istatistiksel test sonucu verilecek kararın, güvenilir olduğu konusunda, kesin karar verilemez. Fakat, olasılık kuramından yararlanarak, bir hipotezin istatistiksel testle ne derece güvenle (ne derece hatayla) kabul ya da reddedileceğini belirlemek olanaklı olmaktadır. Burada önemli olan, $\hat{} - {}_0$ farkının istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığını belirlemektir. Başka bir anlatımla, farkların gerçek değişmeyi mi açıkladığı, yoksa rassal olarak mı meydana geldiğini belirlemektir. Anlamlı farklılık belirlenmişse hipotez, belirli bir hata payıyla reddedilir. Tersi durumda kabul edilir.

SIRA SİZDE

1. İstatistiksel hipotez nedir?

2. İstatistiksel hipotez testinin konusu nedir?

3. İstatistiksel hipotez neden doğru ya da yanlış olabilir açıklayınız.

HİPOTEZ TESTİ TÜRLERİ

AMAÇ 2

Parametrik ve parametrik olmayan teknikler arasında seçim yaparken, dikkat edilecek kriterleri açıklayabileceksiniz.

Hipotez testleri, ilgilenilen değişken(ler)in ölçülmesinde benimsenen ölçeğe bağlı olarak, parametrik hipotez testleri ve parametrik olmayan hipotez testleri şeklinde sınıflandırılırlar. Parametrik testler değişkenlerinin ölçülmesinde eşit aralıklı ya da oranlı ölçeğin kullanıldığı hipotez testleridir. Çünkü; bu iki ölçekle de elde edilen veriler üzerinde aritmetik işlemler yapmak mümkündür. Parametrik hipotez testlerinde, hipotezde bilinen bir olasılık fonksiyonundaki parametresinin önceden bilinen, $_0$ değerine eşit ya da bundan büyük, küçük ya da farklı olduğu ileri sürülebilir.

Parametrik testler örneklem sayısının tek ya da iki oluşuna ve iki örneklemin varlığında, bu örneklemlerin bağımsız ya da bağımlı oluşuna bağlı olarak sınıflandırılırlar. En önemli parametrik testler z ve t testleridir. Bu ünitede tek anakütle (ya da tek örneklem) ortalamasına ilişkin z ve t testleriyle tek anakütle (ya da tek örneklem) oranına ilişkin z testi ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Parametrik olmayan testler, anakütle dağılımı nasıl olursa olsun uygulanabilen testlerdir. Bu testlerde, parametrelerle ilgilenilmeyip, hipotezler, ilgili değişkenin belirli bir nitel özelliğine göre oluşturulur.

Parametrik olmayan testler, değişkenlerinin ölçülmesinde, sınıflayıcı ya da sıralayıcı ölçeğin kullanıldığı hipotez testleridir. Bu tür testlerde, parametrik testlerde olduğu gibi, anakütlenin (örneklemin) tek ya da iki oluşuna ve iki anakütle (iki örneklem) sözkonusu olduğunda da örneklemlerin bağımsız ve bağımlı oluşuna göre sınıflandırılırlar.

Parametrik olmayan hipotez testlerine ilişkin "Ki-Kare Testi" ayrı bir ünitede incelenmiştir.

SIRA SİZDE

1. **Değişkenlerin ölçülmesinde benimsenen ölçeğe bağlı olarak, istatistiksel hipotezler nasıl sınıflandırılır?**
2. **Değişkenlerin ölçülmesindeki, eşit aralıklı ölçeğin kullanılmasında, hangi test türü kullanılır?**
3. **Parametrik olmayan testlere hangi durumlarda başvurulur?**

HİPOTEZ TESTİ SÜRECİNİN ADIMLARI

AMAÇ 3

Bir istatistiksel test sürecinin aşamalarında, hangi işlemlerin yapılacağını sıralayabileceksiniz.

Anakütle parametre değerleri hakkında ileri sürülen iddiaların test edilmesinde aşağıdaki adımlar izlenir:

Hipotezlerin İfade Edilmesi

İstatistiksel hipotezlerin testinde, iki hipotez söz konusudur. Bunlar; "sıfır hipotezi" ve "karşıt hipotez" olarak isimlendirilirler. Bu aşamada, sıfır hipotezinin ve karşıt hipotezin nasıl ifade edileceğine karar verilir.

Sıfır hipotezi (H_0), ilgili ana kütle parametresinin bilinen değerinde herhangi bir farklılığın beklenmediğini ifade eden hipotezdir.

Sıfır hipotezi H_0 simgesiyle gösterilir ve hangi hipotezin test edileceğini ifade eder. H_0 hipotezinde test süreci tamamlanıncaya kadar örneklem istatistiği değeriyle parametresinin değeri hakkında ileri sürülen ${}_0$, ile parametrelerinin değerleri arasındaki farkın örnekleme hatasından kaynaklanabileceği, bu iki değer arasında gerçekte anlamlı bir farklılık olmadığı, farklılığın istatistiksel olarak, sıfır olduğu ifade edilir. Sıfır hipotezi; parametrenin önceden belirlenmiş, bilinen değerinde, hiçbir farklılığın (etkinin) beklenmediğinin ifade edildiği hipotezdir.
Bu açıklamaların ışığında H_0 hipotezi,

$$H_0 : \;\; = {}_0$$

Karşıt hipotez (H_1), ilgili ana kütle parametresinin bilinen değerinde istatistiksel olarak anlamlı farkların beklendiğini ifade eden hipotezdir.

şeklinde ifade edilir.

H_0 hipotezinin test edilebilmesinde, bu hipotezden farklı bir hipotezin de ifade edilmesi gerekir. H_1 simgesiyle gösterilen bu hipoteze "karşıt hipotez" adı verilir. H_1 hipotezi H_0 hipotezinin belirli bir olasılıkla reddedilmesi durumunda kabul edilen ve genellikle araştırma hipotezinin incelendiği hipotezdir. Karşıt hipotez, parametrenin önceden belirlenmiş, bilinen değerinde bazı farklılığın ya da etkinin beklendiğinin ifade edildiği hipotezdir. Bu hipotez araştırmanın amacına bağlı olarak, aşağıdaki üç farklı şekilden birisiyle ifade edilmiş olur:

$$H_1 : \;\; \neq {}_0$$
$$H_1 : \;\; > {}_0$$
$$H_1 : \;\; < {}_0$$

Birinci ifadede, H_0 hipotezi; verilecek kararın, anakütle parametre değerinden, her iki yöndeki (hem küçük hem de büyük yöndeki), anlamlı farklılıklardan etkileneceğini ifade eder. İkinci ifadede, verilecek kararın, anakütle parametre değerinde, sadece büyük yöndeki anlamlı sapmadan etkileneceğini, son ifadedeyse sadece küçük yöndeki anlamlı farklılığın, verilecek kararı etkileyeceğini ifade eder.

Hipotez testlerinde H_1 hipotezi, testin yönünü ya da H_0 hipotezinin reddedileceği bölgenin yerini belirleyen hipotezdir. Red bölgesi, H_0 hipotezinin reddedilmesine (H_1 hipotezinin kabul edilmesine) neden olan örneklem istatistiği (ya da test istatistiği) ile ilgili değerler aralığıdır. Kabul bölgesiyse, H_0 hipotezinin kabul edilmesine (H_1 hipotezinin reddedilmesine) neden olan örneklem istatistiği (test istatistiği) ile ilgili değerler aralığıdır. Hipotez testleri, H_1 hipotezinin ifade ediliş şekline göre: "İki yönlü test", "tek yönlü üstkuyruk testi" ve "tek yönlü alt kuyruk testi" olarak isimlendirilirler. Bu testlere ilişkin hipotezlerin ifade ediliş biçimi aşağıda verilmiştir.

İki Yönlü Testlerde Hipotezler:

$$H_0 : \;\; = {}_0$$
$$H_1 : \;\; \neq {}_0$$

Tek Yönlü ÜstKuyruk Testlerinde Hipotezler:

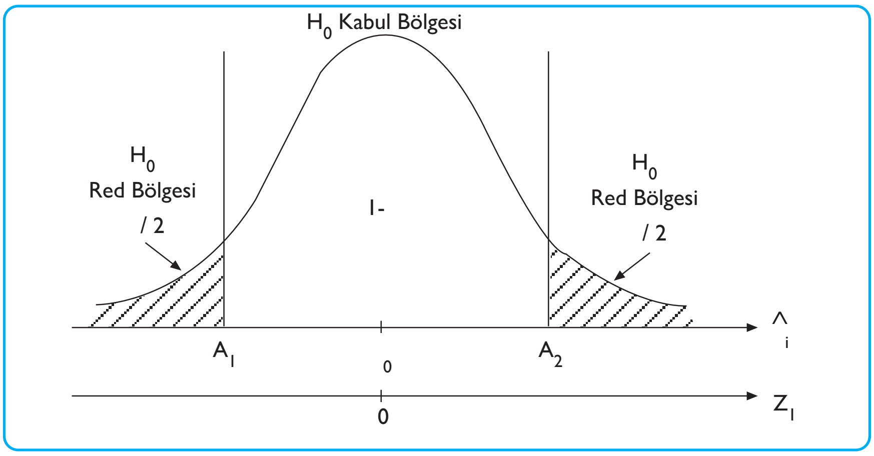
$$H_0 : \;\; = {}_0$$
$$H_1 : \;\; > {}_0$$

Tek Yönlü AltKuyruk Testlerinde Hipotezler:

H_0 : $=$ $_0$
H_1 : $<$ $_0$

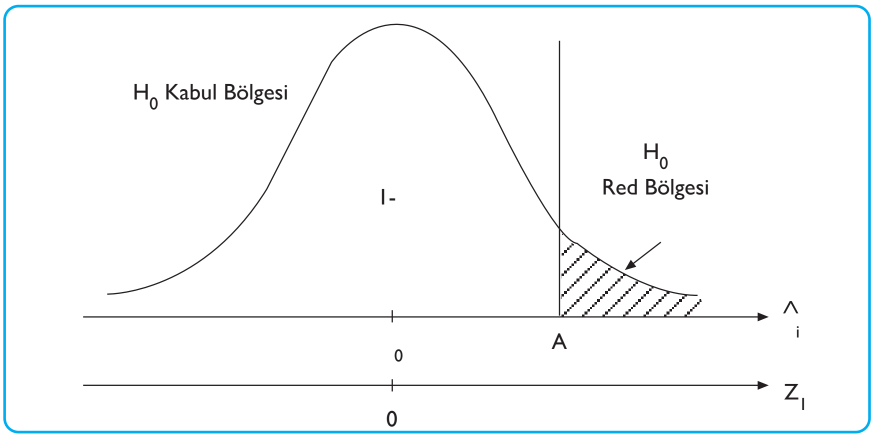
şeklinde belirlenir.

Yukarıdaki her hipotez takımında kullanılan isim, H_1 hipotezinde $\hat{}$ için verilen değerler aralığını açıklamaktadır. Bu durum, örneklem istatistiğinin 'nın normal dağılıma sahip olduğu kabul edilerek aşağıdaki şekillerle açıklanmıştır. Örneğin iki yönlü hipotezlerde H_1 hipotezi Şekil 9.1'de görüldüğü gibi $_0$'ın her iki tarafındaki ile ilgili değerleri kapsamaktadır. Başka bir ifadeyle örneklem istatistiği $\hat{}_i$'nın belirli bir A_1 değerinden küçük ya da belirli bir A_2 değerinden büyük olan değerleri H_1 hipotezi yönünde, H_0 hipotezinin red bölgesinde yer alan değerlerdir.



Şekil 9.1 *İki Yönlü Testlerde Red Bölgeleri.*

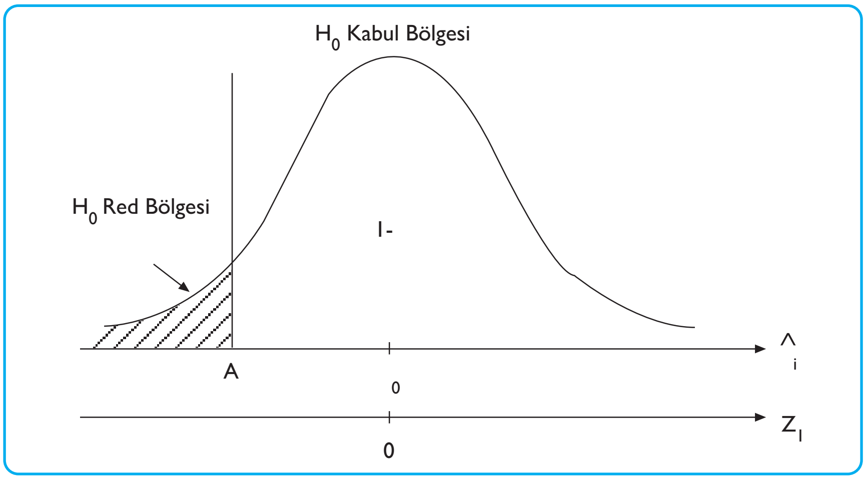
Tek yönlü üstkuyruk testlerinde, H_1 hipotezi, $_0$'dan büyük olan ile ilgili değerleri içerdiği için, bu isim verilmiştir. Tek yönlü üstkuyruk testlerinde, H_1 hipotezi, (Şekil 9.2'de görüldüğü gibi) $\hat{}_i$'nın, $_0$'dan büyük olmak üzere, belirli bir A değerinden büyük değerleri H_1 hipotezi yönünde, H_0 hipotezinin red bölgesinde yer almaktadır.



Şekil 9.2 *Tek Yönlü Üst Kuyruk Testlerinde Red Bölgesi.*

Hipotez testlerinde kabul ya da red edilen hipotez H_0'dır.

Tek yönlü altkuyruk testlerindeyse tek yönlü üst kuyruk testinin tam tersine, (Şekil 9.3'de görüldüğü gibi) $_0$'ın solunda ve $\hat{}_i$'nin A'dan küçük olan değerleri, H_0 hipotezinin red bölgesinde yer alan değerlerdir.



Şekil 9.3 *Tek Yönlü Alt Kuyruk Testlerinde Red Bölgesi.*

Anlamlılık Düzeyinin Belirlenmesi

Bir istatistiksel hipotez testinde ya sıfır hipotezinin reddedilmesi ya da kabul edilmesi şeklinde karar verilir. Bu iki karar arasında seçim yaparken, örneklem istatistiğinden yararlanıldığı için, hatalı karar verme riski vardır. Çünkü; aynı anakütleden rassal olarak seçilen, aynı hacimli farklı örneklemler için hesaplanan istatistikler, örneklemden örnekleme değişen değerler aldığından, anakütle parametre değerinden farklılık göstermektedirler.

Hipotez testlerinde, sıfır hipotezinin yanlışlıkla reddedilmesi ya da kabul edilmesi sonucu işlenen hataya "yorumlama (çıkarsama) hatası" adı verilir. İki tür yorumlama hatası vardır: Bunlar; gerçekte doğru olan sıfır hipotezinin reddedilmesi durumunda işlenen hatayla, gerçekte yanlış olan sıfır hipotezinin kabul edilmesi durumunda işlenen hatadır. Gerçekte doğru olan sıfır hipotezinin reddedilmesi durumunda işlenen hataya I. Tip hata ya da tipi hata adı verilir. Araştırmalarda tipi hata işlemenin maksimum olasılığına "testin anlamlılık düzeyi" denir. Anlamlılık düzeyinin belirlenmesi, doğru olan sıfır hipotezinin, örneklemden elde edilen bilgilere dayanarak reddedilmesi olasılığını belirleyen 'nın seçilmesidir. anlamlılık düzeyi, araştırmacı tarafından, hipotezler ifade edilip veri derlemeye başlamadan önce seçilmelidir. Sosyal bilim araştırmalarında için genellikle %5 ve %1 değerleri seçilmektedir. Yapılan bu seçimle birlikte, doğru olan H_0 hipotezinin reddedilme olasılığı, belirlenmiş olur. Bu olasılık örnekleme dağılımıyla ilişkilendirilerek kullanılır. Bu durumda, anlamlılık düzeyi, doğru olan sıfır hipotezinin reddedilmesi olasılığına eşit olan, örnekleme dağılımındaki oransal alanı göstermiş olur. Örnekleme dağılımında, doğru olan sıfır hipotezinin, reddedilmesi olasılığına eşit olan oransal, alana "red bölgesi" denir. Örnekleme dağılımının bu bölgesi, sıfır hipotezi doğru olduğunda, beklenmeyen örneklem istatistiği değerlerini temsil eder. Örnekleme dağılımında, red bölgesini tanımlamadan önce, örnekleme dağılımını tanımlamak gerekir. Örneklem istatistiğinin normal dağılımlı olması durumu için red ve kabul bölgeleri Şekil 9.1, 9.2 ve 9.3'te gösterilmiştir. Şekillerdeki A, A_1 ve A_2 noktaları red bölgelerinin başlangıç noktalarıdır.

tipi hata yapmanın maksimum olasılığına testin anlam düzeyi adı verilir.

Diğer taraftan, sıfır hipotezi gerçekte yanlış olabilir ve araştırmacı yanlış olan bu hipotezi kabul ederse, yine hatalı karar vermiş olur; bu tür hataya II. Tip hata ya da tipi hata denir. Bu türden hata yapmanın maksimum olasılığı da ile gösterilir.

H_0 doğruyken test sonucunda reddedilirse (I. tip) tipi hata, H_0 doğru değilken test sonucunda kabul edilirse (II. tip) tipi hata gerçekleşmiş olur.

İstatistiksel uygulamalarda tipi hatadan daha çok sakınılır ve genellikle sadece tipi hata kontrol edilir.

Araştırmalarda H_0 hipotezinin doğru olduğuna inanan araştırmacı, anlamlılık düzeyini çok küçük bir değer olarak seçebilir. H_0 hipotezinin kabul edilmesi riskli ise, büyük kayıplara neden oluyorsa, olasılığı büyük tutulmalıdır.

Örneklem hacmi sabit olduğunda, tipi hata işlemenin azalması (artması), tipi hata işleme olasılığının artmasına (azalmasına) neden olur.

Verilerin Derlenmesi

Bir araştırma planında, hipotezlerin ifade edilmesiyle araştırmanın genel çerçevesi ortaya konur, problem ve değişkenler tanımlanmış olur. İfade edilen hipotezlerin test edilebilmesi için, gerekli uygun anlamlılık düzeyi belirlendikten sonra, belirlenen ana kütleden, hangi hacimde bir örneklem seçileceği kararlaştırılır. Daha sonra da ilgili anakütleden belirlenen hacimde rassal bir örneklem seçilerek veriler derlenir. Bu veriler kullanılarak, test edilecek parametre hakkında bilgi üreten örneklem istatistikleri hesaplanır.

Test İstatistiğinin Seçilmesi

Daha önce de belirtildiği gibi, anakütleden rassal örneklem alınmış olsa bile, hesaplanan örneklem istatistiğinin anakütle parametresi hakkında, önceden bilinen, belirlenen değere eşit olması beklenmez. Bu durumda şu soru akla gelebilir: Örneklem istatistiğinin değeriyle bu istatistiğin bilgi ürettiği parametrenin sıfır hipotezinde ifade edilen değeri arasında nasıl bir farklılık vardır? Başka bir ifadeyle, sıfır hipotezi doğruysa, anlamsız bir faklılığı veren bir örneklem istatistiği elde etmek mümkün müdür?

Bu sorunun yanıtlanabilmesi, için, sıfır hipotezinin test edilebilmesinde, örneklem istatistiğinin dağılımının bilinmesine ve uygun test istatistiğine gereksinim vardır.

Hipotez testlerinde, örneklem istatistiğinin dağılımının bilinmesi zorunludur.

Test istatistiği, örneklem istatistiğinin değeriyle anakütlenin, sıfır hipotezinde ifade edilen değeri arasındaki farkın, standartlaştırılmış değeri olarak tanımlanır. Başka bir ifadeyle test istatistiği, örneklem istatistiğinin ^ ile $_0$ arasındaki farkını standart hata birimiyle ifade eden ölçüdür. Test istatistiği örneklemin sıfır hipotezine ne kadar uyduğunu gösterir. Bu nedenle de test istatistiği test sonunda verilecek kararın dayandırıldığı bir örneklem istatistiğidir.

Bir örneklem istatistiğinin değeri, bu örneklem istatistiğinin dağılımının bir değeridir. Mümkün her örneklem istatistiğinin değeri için, bir test istatistiği değeri hesaplanabileceğine göre, test istatistiği örnekleme dağılımından söz edilebilir. Test istatistikleri genellikle normal dağılım (z dağılımı), t dağılımı ya da Ki-Kare dağılımı v.b. gibi bilinen dağılımlara uyar.

Hipotez testi türleriyle ilgili bilgiler verilirken açıklandığı gibi, hipotez testleri için de uygun test istatistiğinin seçimesiyle ilgilenilen değişkenlerin ölçülmesinde kullanılan ölçek türü, örneklem hacmi, örneklem sayısı; (örneklem sayısı iki olduğunda örneklemlerin bağımsız ya da bağımlı olması) gibi hususların bilinmesi gerekir.

Bu ünitede, bazı parametrelere ilişkin hipotezlerin testinde, z ve t test istatistiklerinin seçilme gerekçeleri ve uygulamalarına yer verilmiştir.

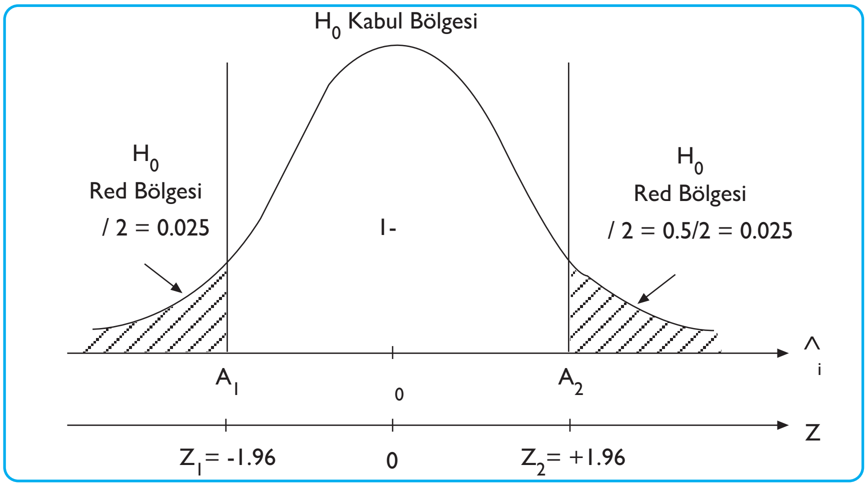
İstatistiksel Kararın Verilmesi

İstatistiksel karar vermekle eş anlamlı olan hipotez testi, aslında anlamlılık düzeyinde H_0 hipotezinin kabul edilmesi ya da reddedilmesi kararıdır. Bu kararın verilebilmesi için bir ölçütün belirlenmesi gerekir. Test istatistiğinin, kritik değeri olarak isimlendirilen bu ölçüt, $\hat{}$ istatistiğinin örnekleme dağılımında, red ve kabul bölgelerini birbirinden ayıran bir değerdir. Test istatistiğinin kritik değeri, bir örnekleme dağılımında, red bölgesinin başlama noktasını gösteren değerdir. Kritik değer, seçilen anlamlılık düzeyine, H_1 hipotezinin ifade ediliş biçimine ve örneklem istatistiğinin dağılım şekline bağlıdır. İzleyen açıklamalar $\hat{}$ örneklem istatistiğinin ve bu istatistiğin standart değeri olan

$$z = \frac{\hat{} - {}_0}{\hat{}}$$

test istatistiğinin normal dağılıma sahip olduğu kabul edilerek yapılmıştır. Açıklamalarda = 0.05 seçilmiştir.

Eğer karşıt hipotez $H_1 : \neq {}_0$ şeklinde ifade edilmişse, red bölgesi Şekil 8.4'te gösterildiği gibi $\hat{}$ istatistiğine ilişkin normal dağılımın her iki ucunda simetrik olarak tanımlanmış olur ve her birinin alanı oransal olarak /2 = 0.05/2 = 0.025'tir. Buna bağlı olarak kritik değerler $\hat{}$ istatistiğine ilişkin normal dağılımın her iki kuyruğundaki, $_0$'a göre simetrik, A_1 ve A_2 değerleri olmaktadır.



Şekil 9.4 *İki Yönlü Testlerde Red Bölgeleri ve Kritik Değerler.*

Ancak; istatistiksel hipotez testlerinde, $\hat{}$ örneklem istatistiği yerine, standartlaştırılmış değer kullanılmaktadır. Bu durumda kritik değerler A_1 ve A_2'nin

$$z_1 = \frac{A_1 - {}_0}{\hat{}} \qquad \text{ve} \qquad z_2 = \frac{A_2 - {}_0}{\hat{}}$$

standart değerleri olur. A_1 örneklem değeri $_0$'ın solunda (A_1 $_0$'dan küçük değerli) olduğu için, z_1 negatif ve A_2 örneklem değeri $_0$'ın sağında (A_2 $_0$'dan büyük değerli) olduğu için, z_2 pozitif değer olarak ifade edilir. z_1 ya da z_2 kritik değerleri = 0.05 anlamlılık düzeyi için Ek-1'de verilen Standart Normal Eğri Alanları Tablosundan yararlanılarak belirlenir. Z tablo değeri (z_{tab}),

$z_{tab} = z_{0,5-0,025} = z_{0.4750} = 1.96$ dır.

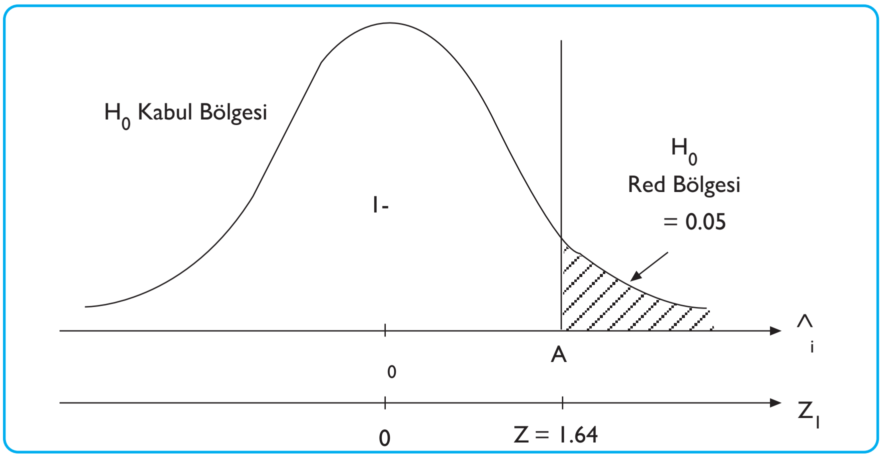
$z_{tab} = \pm 1.96$ değeri standart normal dağılımda %47.5'luk oransal alana karşı gelen örneklem istatistiğinin standart değeridir. İki yönlü testte H_0 hipotezinin reddedilmesi için,

$$z_{hes} = \left| \frac{\hat{} - {}_0}{\hat{}} \right| > z_{tab} = 1.96$$

koşulunun sağlanması gerekir. Tersi durumda H_0 hipotezi kabul edilir.

Eğer H_1 : > $_0$ ya da H_1 : < $_0$ şeklinde ifade edilmişse, H_0 hipotezinin red bölgesi, birinci durumda, $\hat{}$ istatistiğine ilişkin normal dağılımın üstkuyruğunda, ikinci durumda altkuyruğunda tanımlanmışsa alan = 0.05 olur. Buna bağlı olarak kritik değerler sırasıyla (Şekil 9.5'te gösterildiği gibi) $\hat{}$ istatistiğine ilişkin normal dağılımın üst kuyruğundaki A değeri ya da bunun standart değeri

$$z_1 = \frac{A - {}_0}{\hat{}}$$



Şekil 9.5 *Tek Yönlü Üst Kuyruk Testlerinde Red Bölgesi ve Kritik Değer.*

ve (Şekil 9.6'da gösterildiği gibi) $\hat{}$ istatistiğine ilişkin normal dağılımın alt kuyruğundaki A değeri ya da bunun standart değeri

$$z_1 = \frac{A -}{\hat{}}$$

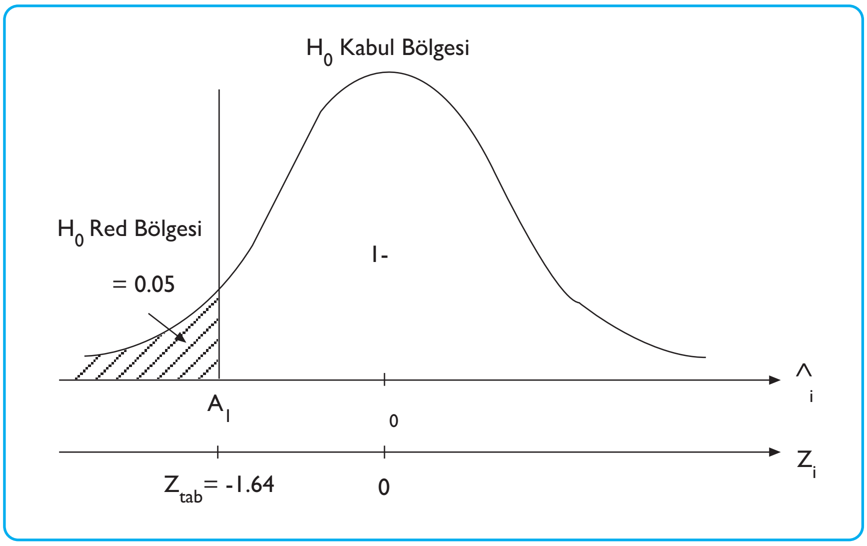
olur. Bu z değerleri birbirinin simetriğidir. ÜstKuyruk testinde, z pozitif, altKuyruk testinde, z negatif işaretlidir. z değerleri = 0.05 için Ek-1'de verilen Standart Normal Eğri alanları tablosundan yararlanılarak belirlenirler.

$z_{tab} = z_{0.5-0.05} = z_{0.4500} = 1.64$ tür.

$z_{tab} = 1.64$ değeri, standart normal dağılımda, %45'lik oransal alana karşı gelen, örneklem istatistiğinin standart değeridir. Tek yönlü üstkuyruk testi söz konusu olduğunda z_{tab} = +1.64, tek yönlü altkuyruk sözkonusu olduğunda z_{tab} = -1.64 alınır. Bu bilgilere göre H_0 hipotezinin reddedilmesi için, tek yönlü üstkuyruk testinde;

$$z_{hes} = \left(\frac{\hat{\ } - {}_0}{\hat{\ }} \right) > (z_{tab} = 1.64)$$

olmalıdır.



Şekil 9.6 *Tek Yönlü Alt Kuyruk Testlerinde Red Bölgesi ve Kritik Değer.*

Tek yönlü altkuyruk testinde H_0'ın reddedilebilmesi için,

$$z_{hes} = \left(\frac{\hat{\ } - {}_0}{\hat{\ }} \right) > (z_{tab} = 1.64)$$

koşulunun sağlanması gerekir. Tersi durumda H_0 hipotezi kabul edilir.

H_0 hipotezinin reddedilmesi yönündeki kararlar, örneklem değeri $\hat{\ }$ ile anakütle parametresi arasında, anlamlılık düzeyinde anlamlı bir farklılığın var olduğunu, H_0 hipotezinin kabul edilmesi durumundaysa olan farklılığın örnekleme hatasından kaynaklandığı anlamına gelir.

Probleme İlişkin Kararın Verilmesi

Hipotez testlerinde önemli olan, istatistiksel kararın, araştırma problemine ilişkin karara dönüştürülmesidir. Bu konu ünitede örnek problemler üzerinde açıklanmıştır.

SIRA SİZDE

1. **Hangi hipotez test edilecek hipotezdir?**
2. **Hangi durumda iki yönlü teste başvurursunuz?**
3. **I. Tip hata ne demektir, bu hatanın büyüklüğü nasıl belirlenir?**

TEK ANAKÜTLE PARAMETRESİYLE İLGİLİ HİPOTEZ TESTLERİ

AMAÇ 4

Anakütle aritmetik ortalamasına ve anakütle oranına ilişkin hipotez testi uygulamalarını yapabileceksiniz.

Pek çok araştırmada, tek bir anakütlenin bir parametresinin değerine ilişkin, hipotezlerin ileri sürüldüğü görülmektedir. Başka bir ifadeyle, bir anakütlenin ilgilenilen bir değişkeni hakkında, bilinen ya da belirlenen bir standarta göre yorumların yapıldığı görülmektedir. Aşağıdaki hipotezler tek anakütle parametresiyle ilgili hipotez testine örnek verilebilir: A ürününün reklamını beğenenlerin oranı en az %45'tir. Günlük ortalama üretimi 100 Ton olan bir üretim sürecinde yapılan değişiklik, günlük ortalama üretim miktarını arttırmıştır (vb.) gibi. Bu tür hipotezlerin testinde, tanımlanan bir anakütlenin ilgilenilen bir değişkenine ilişkin önceden belirlenen (ya da bilinen) bir parametre değerinin ($_0$'ın) değişmediği şeklindeki sıfır hipotezi test edilir. Böylece, verilen karara göre, karşıt hipotezde (araştırma hipotezinde) ileri sürülen iddianın, kabul edilip edilmeyeceği ortaya çıkar.

Bu testlerde karar verilirken örneklem istatistiğinin değeriyle bu istatistiğin bilgi ürettiği parametrenin bilinen ya da belirlenen $_0$ değeri karşılaştırılır.

Ünitenin izleyen bölümlerinde, uygulamada sıkça karşılaşılan tek anakütle parametresiyle ilgili olarak, anakütle ortalamasına ilişkin testlerle anakütle oranına ilişkin testler ele alınmıştır.

Anakütle Ortalamasına İlişkin Hipotez Testleri

Bu testlerde, tanımlanan anakütleden rassal olarak seçilen bir örneklem için hesaplanan $\bar{X}$ değeriyle, bu örneklemin seçildiği anakütlenin aritmetik ortalaması ile ilgili, önceden belirlenen (ya da bilinen) $_0$ gibi bir değer arasındaki farklılığın istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığı araştırılır. Belirlenen farklılığın, sıfır hipotezini reddetmek için, yeterli olup olmadığına karar verilir.

Anakütle ortalamasına ilişkin hipotez testleri uygulamada, sıkça kullanılan önemli parametrik testlerdir.

Bu hipotezlerin test edilmesine ilişkin açıklamalar, örneklem hacminin büyük olması ($n \geq 30$ birim) ve örneklem hacminin küçük olması ($n < 30$ birim) durumları için, alt başlıklar altında, aşağıdaki örnek problemler üzerinde ayrıntılı olarak ele alınmıştır.

Anakütle Ortalamasına İlişkin Büyük Örneklem Testi

Bu test türünde :

- Örneklem rassal olarak seçilir.
- Örneklem hacminin yeterli büyüklükte ($n \geq 30$) birimden oluştuğu ya da anakütle normal dağılımlı ve değişkenliğinin biliniyor olması gereklidir.
- H_0 : = $_0$ hipotezi, seçilecek bir anlamlılık düzeyi için test edilir.

ÖRNEK 1 ***Bir peynir üretim sürecinde, üretimin 500 gr.'lık paketler halinde gerçekleştirilmesi planlanmıştır. Üretimin planlandığı gibi gerçekleşip gerçekleşmediğini kontrol amacıyla rassal olarak 100 paket seçilmiş ve bu paketler için ortalama ağırlık 495 gr., standart sapma da 20 gr. olarak hesaplanmıştır. = 0.05 anlam düzeyi için, üretimin planlandığı gibi gerçekleştiği söylenebilir mi? Karar veriniz.***

ÇÖZÜM

1. Adım: Hipotezlerin ifade edilmesi

Peynir paketlerinin belirlenen ortalama ağırlığı (standart ağırlık) 500 gr.dır. Bu nedenle, burada sıfır hipotezi, üretilen peynir paketlerinin ortalama ağırlığının 500 gr. olduğu yönündedir. Bu iddiayı, 500 gr.'dan hem küçük, hem de büyük yöndeki anlamlı ağırlık farklılıkları çürütecektir. Başka bir ifadeyle, bu anlamlı farklılıklar üretimin planlandığı gibi gerçekleşmediğini gösterecektir. Buna göre yapılacak test, iki yönlü test olup, hipotezler:

H_0 : = 500 gr.
H_1 : ≠ 500 gr.

şeklinde ifade edilmelidir.

2. Adım: İstatistiksel test

Bu örnekte tanımlanan anakütleler sonsuz olurlar. Anakütlenin dağılımı ve değişkenliği hakkında bilgi yoktur. Örneklem hacmi n = 100 pakettir ve n ≥ 30 olduğundan, (daha önce açıklanmış olduğu gibi) örneklem aritmetik ortalamasının örnekleme dağılımı, normal dağılımdır. Kullanılması gereken test istatistiğide örneklem aritmetik ortalamasının standart değeri olan z istatistiğidir. Bu nedenle burada z testi uygulanmalıdır.

$$z = \frac{\overline{X} - \ _0}{s_{\bar{x}}}$$

Anakütle standart sapması bilinmediği için $_{\bar{x}}$ 'nın tahmini olan $s_{\bar{x}}$ kullanılmalıdır.

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

3. Adım: Anlamlılık düzeyinin belirlenmesi

Problemde doğru olan hipotezinin reddedilmesi olasılığı , %5 seçilmiştir. Red bölgeleri, ortalamanın örnekleme dağılımının her iki kuyruğunda tanımlandığı için, red bölgelerinin her birinin oransal büyüklüğü, $\frac{\ }{2}$ = 0.05/2 = 0. dir.

4. Adım: H_0'ın red bölgesinin belirlenmesi

H_1 hipotezi, testin red bölgesinin yönünü belirlediğine göre, bu testte red bölgesi örneklem ortalamasının, örnekleme dağılımının simetrik olması nedeniyle hem alt kuyruğunda hem de üst kuyruğunda tanımlanmıştır. Bu durum Şekil 9.7'de gösterilmiştir.

5. Adım: Test istatistiğinin hesaplanması

n = 100 paket
$\bar{X}$ = 495 gr.
s = 20 gr.
$_0$ = 500 gr.
= 0.05

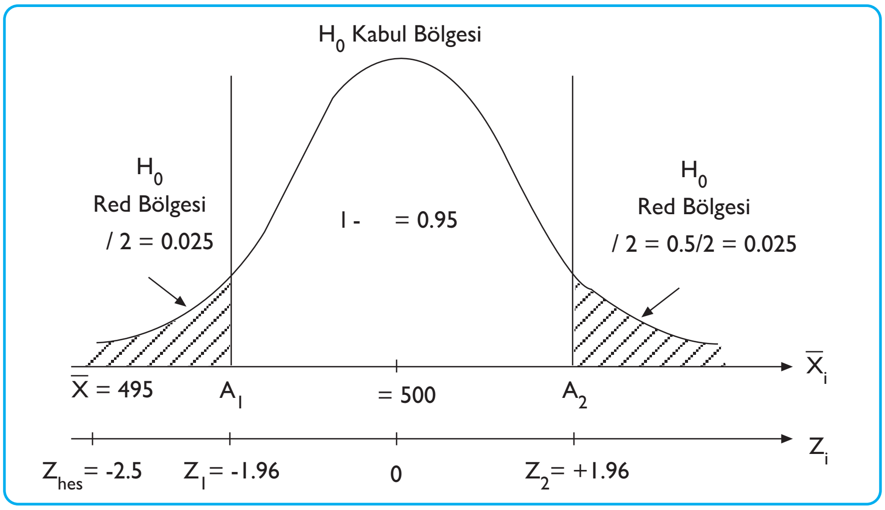
$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{20}{\sqrt{100}} = 2$$

ve

$$z = \frac{\bar{X} - _0}{s_{\bar{x}}} = \frac{495 - 500}{2} = -2.5$$

olarak hesaplanır.

$\bar{x}$ 'nın örnekleme dağılımı normal olduğu için, bu dağılımı oluşturan değerlerin standart değerleri olan z test istatistiğinin örnekleme dağılımı, standart normal dağılım gösterir. İki yönlü bir test olduğu için red bölgesi Şekil 9.7'de gösterildiği gibi bu dağılımın her iki kuyruğunda tanımlanmıştır ve oransal büyüklükleri $/2 = \frac{0,05}{2} = 0.02$ dir. Buna göre, bu dağılımın alt kuyruk bölgesinde tanımlanan red bölgesinin sınır değeri z_1 = –1.96, üstkuyruk bölgesinde tanımlanan red bölgesinin sınır değeri z_2 = 1.96 olacaktır.



Şekil 9.7 *Anakütle Ortalaması İçin İki Yönlü Test Sonuçları*

Hesaplanan test istatistiği $z_{hes} = |2.5| > z_{tab} = 1.96$ olduğundan H_0 hipotezi reddedilir, dolayısıyla H_1 kabul edilir. Ayrıca aynı karar Şekil 9.7'de z_{hes} = –2.5 standart değerinin Z_i eksenindeki red bölgesinde yer aldığını söylemek suretiyle de açıklanabilir.

H_0 hipotezinin reddedilmesi, üretilen peynir paketlerinin ortalama ağırlığının 500 gr. olmadığını, üretim sisteminin planlandığı gibi üretimi gerçekleştirmediğini gösterir.

ÖRNEK 2

Bir firmanın pazarlama yöneticisi, üniversite öğrencilerinin aylık ortalama gazlı içecek tüketimlerinin en az 20 lt. olabileceğini düşünmektedir. Eğer yöneticinin bu düşüncesi doğrusa üniversite öğrencilerine yönelik yeni stratejiler geliştirilecektir. Bu amaçla, rassal olarak seçilen, 1000 üniversite öğrencisi üzerinden veriler derlenmiş ve bu öğrencilerin ortalama gazlı içecek tüketiminin 22 lt. ve standart sapmasının da 8 lt. olduğu hesaplanmıştır. Yöneticinin düşüncesinin doğru olup olmadığına = 0.01 anlam düzeyini kullanarak karar veriniz.

ÇÖZÜM

1. Adım: Hipotezlerin ifade edilmesi

Burada verilecek karar, ortalama gazlı içecek tüketiminin 20 lt.'den fazla olmadığıdır. Araştırma hipoteziyse 20 lt. ve daha fazla olduğudur.

Buna göre hipotezler:

H_0 : = 20 lt.
H_1 : > 20 lt.

şeklinde ifade edilmelidir.

2. Adım: İstatistiksel test

Örneklem hacmi n = 1000 öğrenci (n > 30 birim) olduğu için $\bar{x}$ 'nın örnekleme dağılımı normaldir. $\bar{x}$ 'nın standart sapması ya da standart hata $s_{\bar{x}}$ birimi cinsinden $\bar{x} = 22$ değerinin bilinen = 20 değerinden ne kadar farklılık gösterdiğini ölçmek için standartlaştırılmış z değişkeni kullanılır. z standartlaştırılmış test istatistiği olarak ifade edilir.

$$z = \frac{\bar{x} - {}_0}{s_{\bar{x}}}$$

$\bar{x}$ 'nın örnekleme dağılımı normal olduğu için = ${}_0$ = 20 olduğu zaman, z standart normal dağılıma sahip, rassal değişkendir. Bu nedenle, bu hipotezlerin testi için z testi uygulanmalıdır.

3. Adım: Anlamlılık düzeyinin belirlenmesi

Firma yöneticisi, doğru olan H_0 hipotezinin reddedilmesi olasılığı 'yı, 0.01 olarak seçmiştir. 'nın küçük seçilmiş olması yöneticinin, düşüncesinde çok fazla kararlı olmadığını gösterir. Çünkü H_0 hipotezinin kabul bölgesinin oransal büyüklüğü 1 – = 0.99'dur. Red bölgesinin büyüklüğü = 0.01'dir. Bu durum Şekil 9.8'de gösterilmiştir.

4. Adım: H_0'ın red bölgesine karar verilmesi

Bu testte H_1 > 20 lt. olarak ifade edildiği için H_0 hipotezinin red bölgesi (Şekil 9.8'de gösterildiği gibi) dağılımın üst kuyruğunda tanımlanmıştır. Yani hipotez, tek yönlü üst kuyruk testiyle test edilecektir.

5. Adım: Test istatistiğinin hesaplanması

$_0$ = 20 lt.

$\bar{X}$ = 22 lt.

s = 8 lt.

n = 1000 öğrenci

= 0.01

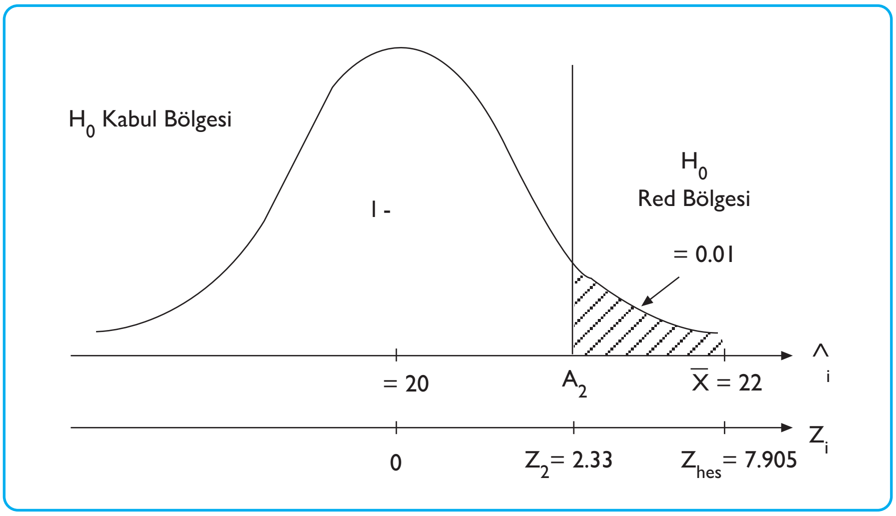
$$s_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{8}{\sqrt{1000}} = \frac{8}{31.62} = 0.253$$

$$Z = \frac{\bar{X} - {}_0}{s_{\bar{X}}}$$

$$Z = \frac{22 - 20}{0.253} = 7.905$$

$$Z_{hes} = 7.905 > Z_{tab} = 2.33$$

olduğu ya da hesaplanan z_{hes} = 7.905 değeri (Şekil 9.8'de görüldüğü gibi) red bölgesinde kaldığı için H_0 hipotezi red (dolayısıyla H_1 hipotezi kabul) edilir.



Şekil 9.8 *Anakütle Ortalaması İçin Tek Yönlü ÜstKuyruk Testi Sonuçları.*

Yukarıdaki istatistiksel karara göre, öğrencilerin aylık ortalama gazlı içecek tüketimi 20 lt. den fazladır. Yönetici, üniversite öğrencilerine yönelik yeni stratejiler geliştirmelidir.

Anakütle Ortalamasına İlişkin Küçük Örneklem Testi

Araştırmaların bir çoğunda araştırmaya ayrılan para, zaman ve diğer imkanların sınırlı olması gibi nedenlerle, örneklem hacmini, daha önceki açıklamalarımızda belirtilen büyüklükte (genellikle n ≥ 30 birim) sağlamak mümkün olmayabilir. Örneğin; çok nadir görülen bir hastalıkla ilgili araştırmada vaka sayısını, uzun süren deneylere dayanan araştırmalarla ve maliyeti yüksek olan laboratuar çalışmalarıyla örneklem hacmini arttırmak çok güçtür. Örneklem hacminin az olduğu bu gibi durumlarda, küçük örneklemler için geliştirilmiş test yöntemlerine başvurulur. Bu bölümde, tek anakütle ortalaması için kurulan hipotezlerin, küçük örneklemler (n < 30 birim) kullanılarak, nasıl test edileceği konusu ele alınmıştır.

Önceki bölümde açıklanan tek anakütle ortalamasına ilişkin büyük örneklem testinde, sıfır hipotezinin testi için, örnekleme dağılımı olarak, normal dağılım kullanılmıştı. Çünkü; örneklem hacminin en az 30 birim olması ya da anakütle dağılımının normal ve değişkenliği 'nın biliniyor olması durumları, göz önüne alınmıştı.

Anakütle standart sapması bilindiğinde, ortalamanın örnekleme dağılımı ortalaması ve standart sapması (standart hatası) $_{\bar{x}} = \frac{\ }{\sqrt{n}}$ olan, normal dağılımı gösterir.

Genellikle bilinmez. Araştırmacı tek anakütle ortalamasına ilişkin hipotez testi için yerine onun tahmini olan örneklem standart sapması s'yi kullanarak ortalamanın örnekleme dağılımının standart hatasını ($s_{\bar{x}}$ 'yı) tahminler. Bu durumd, ortamanın standart hata tahmini ($s_{\bar{x}}$) aşağıdaki gibi yazılır:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

ve büyük bir hata işlenmemiş olur.

Örneklem hacminin küçük olması durumunda, yerine s'nin kullanılması istatistiksel test üzerinde etkili olur. Çünkü; yerine s'nin kullanılması durumunda tahmin edilen istatistik $\bar{x} - {}_0 / s_{\bar{x}}$ standart normal dağılım göstermemekte, dolayısıyla büyük örneklemlerde izlenen yöntem geçerli olmamaktadır. Normal dağılıma sahip ve değişkenliği bilinmeyen bir anakütleden seçilen 30'dan daha az birim içeren bir örneklemin aritmetik ortalaması, n – 1 serbestlik derecesiyle t dağılır. t istatistiği,

Küçük örneklem testlerinde test istatistiği, $t = \frac{\bar{x} - {}_0}{s_{\bar{x}}}$ 'dir.

$$t = \frac{\bar{x} - {}_0}{s_{\bar{x}}}$$

şeklindedir. Burada $s_{\bar{x}}$, örneklem ortalamasının standart hata tahminini gösterir ve

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}}$$

eşitliği ile hesaplanır.

t dağılımı da normal dağılım gibi simetrik bir dağılımdır ve örneklem hacmi büyüdükçe normal dağılıma yaklaşır.

Küçük örneklem kullanılarak yapılan tek ana kütle ortalamasına ilişkin hipotez testleri, kullanılan test istatistiği dışında tek anakütle ortalamasına ilişkin büyük örneklem testlerine benzemektedir. Aşağıdaki örnek problem üzerinde bu testin uygulanış biçimi test sürecinin adımları itibariyle açıklanmıştır.

Tek anakütle ortalamasına ilişkin büyük örneklem testinde olduğu gibi, küçük örneklem testinde de örneklem aritmetik ortalaması $\bar{x}$ ile anakütlenin ortalaması hakkında daha önceden bilinen ya da belirlenen bir değer ${}_0$ arasındaki farkın istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığı araştırılır.

ÖRNEK 3

Bir okuldan geçmiş yıllarda mezun olan öğrencilerin ortalama mezuniyet puanı 66 puandır. Bu yıl mezun olan öğrenciler arasından 26 öğrenci rassal olarak seçilmiş ve bunların ortalama mezuniyet puanının 70 puan ve standart sapmasının 10 puan olduğu hesaplanmıştır. Geçmiş yıllarda mezun olan öğrencilerin ortalama mezuniyet puanıyla bu yıl mezun olanların ortalama puanları arasında farklılık var mıdır? = 0.01 için test ediniz.

ÇÖZÜM

1. Adım: Hipotezlerin ifade edilmesi

Bu problemde, iki dönemdeki mezuniyet ortalamaları arasında bir farklılık olmadığı yönündeki sıfır hipotezi test edilecektir. Buna göre hipotezler

H_0 : = 66 puan
H_1 : $\neq$ 66 puan

şeklinde ifade edilmelidir.

2. Adım: İstatistiksel test

Örneklem hacmi n = 26 öğrencidir ve öğrencilerin geçmiş yıllardaki mezuniyet puanlarının dağılımı normal dağılıma sahiptir. 26 öğrencinin oluşturduğu örneklem küçük örneklemdir. H_0 hipotezinin testi için küçük örneklem testlerinde kullanılan t test istatistiği

$$t = \frac{\bar{x} - \ _0}{s_{\bar{x}}}$$

kullanılır. Bu nedenle de t testi uygulanmalıdır.

3. Adım: Anlamlılık düzeyinin belirlenmesi

Probleme ilişkin testte, = $_0$ = 66 puan olduğunda, testin kontrolünün olasılık düzeyi %1 olarak düşünülmüştür.

4. Adım: H_0'ın red bölgesinin belirlenmesi

H_0 hipotezi, iki yönlü testle test edilecektir. Hipotezin red bölgeleri, t dağılımının her iki kuyruğunda tanımlanmıştır. Şekil 9.9'daki taralı alanlar H_0 hipotezinin red bölgeleridir.

5. Adım: Test istatistiğinin hesaplanması

n = 26
$\bar{x}$ = 70
s = 10
$_0$ = 66
= 26 – 1 = 25

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = 2$$

ve

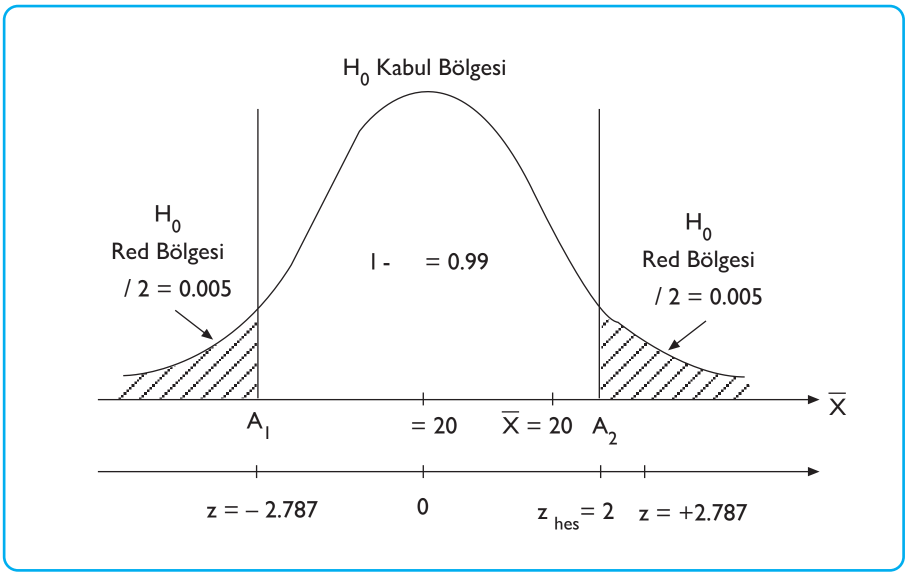
$$t = \frac{\bar{x} - \quad _0}{s_{\bar{x}}} = \frac{70 - 66}{2} = 2$$

olarak elde edilir.

Test edilecek hipotez iki yönlüdür. = 0.01 ve n = 26 için t tablo değeri (t_{tablo})

t_{tablo} = t (1 – /2 ; = n – 1) = 2.787 olarak belirlenir.
(t_{hes} = 2) < (t_{tablo} = |2.787|)

Olduğundan, istatistiksel karar H_0 kabul, H_1 red edilir şeklinde olacaktır. Şekil 9.9'da görüldüğü gibi hesaplanan test istatistiği değeri, kabul bölgesinde yer almaktadır.



Şekil 9.9 *Küçük Örneklemlerde İçin İki Yönlü Test Sonuçları.*

Yukarıdaki istatistiksel karara göre, eski ve yeni öğrencilerin mezuniyet puanları arasındaki farklılık, örnekleme hatasından kaynaklanmaktadır; eski ve yeni öğrencilerin ortalama mezuniyet puanları arasında anlamlı bir fark yoktur.

Anakütle Oranına İlişkin Test

Pek çok araştırmada ilgilenilen değişken, iki şıklı ya da iki şıkka indirgenmiş değişken olabilir. Örneğin Anadolu Üniversitesi öğrencileri, cinsiyet değişkeni bakımından erkek kadın, başarı değişkeni bakımından da başarılı başarısız olmak üzere iki şıklıdır.

Daha önce de açıklandığı gibi, bir anakütlenin, ilgilenilen iki şıklı bir değişkeninin, herhangi bir şıkkına sahip birimlerinin oranına "anakütle oranı" denir ve simgesiyle gösterilir. Ünitenin bu kesiminde, anakütle oranı 'nin değeri hakkında ileri sürülen bir önermenin, nasıl test edileceği konusu ele alınmıştır. Tek anakütle oranına ilişkin test olarak isimlendirilen bu testin, örneklem oranı p ile anakütle oranı 'nin iddia edilen değeri $_0$ arasındaki farkın istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığı araştırılır. Örneklem hacmi yeterli büyüklükte olduğunda (n > 30 birim), anakütle oranı hakkındaki testler daha önce açıklanan anakütle ortalaması için büyük örneklem testlerindekilere benzer şekilde yapılır. Ancak, test için örneklem istatistiği olarak örneklem oranı p ve bu istatistiğin örnekleme dağılımı kullanılır. n ≥ 30 olduğunda, örneklem oranı p'nin örnekleme dağılımı, yaklaşık normal dağılıma sahip olur. Bu durumda, p örneklem istatistiği dağılımına ilişkin standart değerlerin dağılımının da normal olacağı açıktır.

Anakütle oranı 'ye ilişkin testlerde örneklem hacmi büyük olduğunda, standartlaştırılmış z test istatistiği kullanılır:

$$z = \frac{p - \ _0}{\ _p}$$

Burada, $_p$ örneklem oranı, p'nin örnekleme dağılımının standart sapmasını gösterir ve

$$_p = \sqrt{\frac{\ _0(1 - \ _0)}{n}}$$

eşitliği ile hesaplanır.

Eğer örneklem oranı p ile ana kütle oranı 'nin ileri sürülen $_0$ değeri arasındaki farkın, istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığı araştırılıyorsa ana kütle oranına ilişkin test uygulanır ve test istatistiği $z = \frac{p - \ _0}{\ _p}$ 'dir.

ÖRNEK 4

Bir yönetici, işletmesinde toplam kalite yönetimi uygulamayı düşünmektedir. Eğer işçilerinin en az %60'ı bu düşünceden yanaysa yönetici düşüncesini uygulamaya karar verecektir. Bu amaçla rassal olarak 750 işçi seçilmiş ve bunların 495'inin toplam kalite yönetimi düşüncesini benimsediği tespit edilmiştir. Yönetici, toplam kalite yönetimine geçmeli midir? = 0.01 anlam düzeyi kullanarak karar veriniz.

ÇÖZÜM

1. Adım: Hipotezlerin ifade edilmesi

Bu örnekte; sıfır hipotezi, toplam kalite yönetimi uygulamasını düşünenlerin oranı %60 ve daha azdır şeklindedir. Sıfır hipotezi tek yönlü karşıt (araştırma) hipotezi ile test edilecektir. Hipotezler:

H_0 : = 0.60
H_1 : > 0.60

şeklinde ifade edilir.

2. Adım: İstatistiksel test

H_1 : > $_0$ = 0.60 olduğundan, H_0'ın kabul ya da reddi için uygulanacak test ana kütle oranına ilişkin tek yönlü üst kuyruk testi olmalıdır.

3. Adım: Anlamlılık düzeyinin belirlenmesi

Red bölgesi, (Şekil 9.10'da gösterildiği) gibi oranların örnekleme dağılımının üstkuyruğunda tanımlanmıştır. Anlamlılık düzeyi = 0.01 benimsenmiştir. Testin red bölgesinin oransal büyüklüğü 0.01'dir.

4. Adım: H_0'ın red bölgesinin belirlenmesi

Örneklem oranının %60'a eşit ve küçük olması durumunda H_0 hipotezinin reddedilmesi söz konusu değildir.

5. Adım: Test istatistiğinin hesaplanması

Test istatistiğinin hesaplanması problemde belirtildiği gibi, 750 işçinin 495'i toplam kalite yönetimi uygulamasından yana düşünceye sahiptir yani örneklem oranı p:

$$p = \frac{r}{n} = \frac{495}{750} = 0.66$$

dır.

Örneklem oranı p = 0.66 ile anakütle oranı hakkındaki hipotez değeri $_0$ = 0.60 arasındaki fark, istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık mıdır? Başka bir ifadeyle örneklem oranı p=0.66 olması örnekleme hatasından mı kaynaklanmıştır? Bu sorunun yanıtlanabilmesi için, test istatistiğinin hesaplanması gerekir.

n = 750 işçi (n ≥ 30 birim) olduğu için, örneklem oranının örnekleme dağılımı, normal dağılım gösterir. Buna göre uygulanacak test istatistiği:

$$z = \frac{p - {}_0}{{}_p}$$

olur. Örnek için, standart hata:

$${}_p = \sqrt{\frac{{}_0(1 - {}_0)}{n}} = \sqrt{\frac{(0.60)(0.40)}{750}} = 0.0179$$

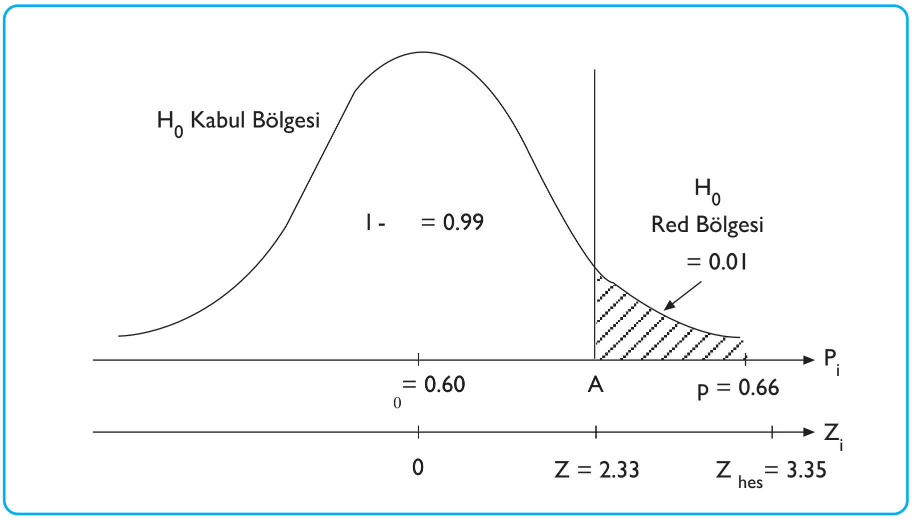
ve

$$z = \frac{0,66 - 0.60}{0.0179} = 3.35$$

olarak elde edilir.

Test istatistiğinin dağılımı normal olduğu ve = 0.01 için kritik z_{tablo} değeri (standart normal eğri alanları tablosundan) z_{tablo} = 2.33 olarak belirlenir. Bu değer standart normal dağılımın oransal olarak 0.495'lik alanına karşı gelmektedir. z test istatistiğinin hesaplanan değeri z_{hes} = 3.35 , z_{tablo} = 2.33 değerinden büyük olduğu (z_{hes} = 3.35 > z_{tablo} = 2.33) için H_0 : = 0.60 hipotezi reddedilir (dolayısıyla H_1 hipotezi kabul edilir). Örneklem oranı p = 0.66 değeri istatistiksel olarak anlamlı bir farklılığı göstermektedir; örneklem oranı p = 0.66 değeri için standart değer z_{hes} = 3.35 red bölgesinde yer almaktadır.

Bu kararın anlamı: Toplam kalite yönetimini benimseyen işçinin oranı %60'tan büyüktür; yönetici toplam kalite yönetimine geçme düşüncesini uygulamalıdır.



***Şekil 9.10** Anakütle Oranı İçin Test Sonuçları.*

ÖRNEK 5

Pazarlama yöneticisi, Üniversite öğrencileri arasında günde 2 ve daha fazla gazlı içecek tüketenlerin oranının en fazla %40 olduğuna inanmaktadır. Eğer bu doğruysa yönetici, üniversite öğrencilerine yönelik pazarlama stratejileri uygulamaya karar verecektir. Bu amaçla, üniversite öğrencileri arasından rassal olarak 120 öğrenci seçilmiş ve onların 42'sinin günde 2 ve daha fazla gazlı içecek içtiği tespit edilmiştir. = 0.05 için yönetici üniversite öğrencilerine yönelik pazarlama stratejileri uygulamalı mıdır? Karar veriniz.

ÇÖZÜM

1. Adım: Hipotezlerin ifade edilmesi

Bu örnekte günde 2 ve daha fazla gazlı içecek tüketen öğrenci oranının 0.40 ve daha fazla olduğu hipotezi test edilecektir. Araştırma hipotezi bu oranın 0.40 'dan az olduğu şeklindedir. Buna göre hipotezler

H_0 : = 0.40
H_1 : < 0.40

şeklinde ifade edilir.

2. Adım: İstatistiksel test

H_1 hipotezi < 0.40 şeklinde ifade edildiğinden, H_0'ın kabul ya da reddi için uygulanacak test, ana kütle oranına ilişkin tek yönlü alt kuyruk testi olmalıdır.

3. Adım: Anlamlılık düzeyinin belirlenmesi

Testin red bölgesi, oranların örnekleme dağılımının altkuyruğundadır. Anlam düzeyi = 0.05 seçildiği için, testin red bölgesinin oransal büyüklüğü 0.05'tir. Bu %5'lik bölgede yer alan örneklem oranları H_0 hipotezinin reddedilmesine neden olacak örneklem istatistikleridir.

4. Adım: H_0'ın red bölgesinin belirlenmesi

$z_{hes} > z_{tablo}$ için H_0 reddedilecektir.

5. Adım: Test istatistiğinin hesaplanması

120 öğrencinin içinde günde 2 ve daha fazla gazlı içecek için öğrenci sayısı 42 kişidir. $p = \frac{r}{n} = \frac{42}{120} = 0.3$ tir. Örneklem büyük örneklemdir. Örneklem oranı p'nin dağılımı normaldir ve standart hatası,

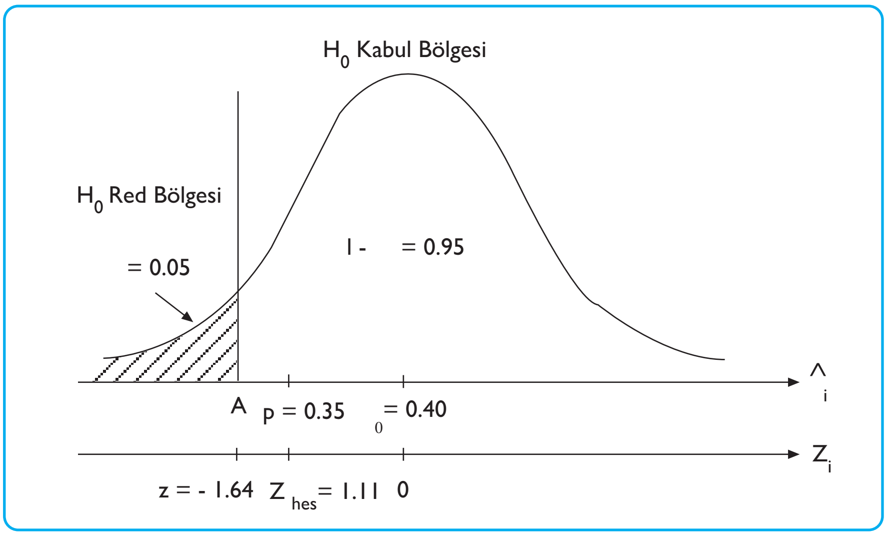
$$p = \sqrt{\frac{{}_0(1 - {}_0)}{n}} = \sqrt{\frac{(0.40)(0.60)}{120}} = \sqrt{\frac{0.24}{120}} = 0.045$$

ve test istatistiği:

$$z = \frac{0.35 - 0.40}{0.045} = 1.1$$

olarak elde edilir.

Hesaplanan z test istatistiğinin değeri, z_{hes} = 1.11 = 0.05 anlam düzeyinde standart normal dağılım tablo değerinden (z_{tablo} = 1.64) küçük olduğu için, H_0 hipotezi kabul edilirse H_1 hipotezi reddedilir. Burada z_{tablo} = 1.64 değeri standart normal dağılımda 0.45'lik alana karşı gelen değerdir.



Şekil 9.11 *Anakütle Oranı İçin Test Sonuçları.*

Bu kararın anlamı, üniversite öğrencileri arasında günde 2 ve daha fazla gazlı içecek tüketen öğrencilerin oranı %40 tan az değil fazladır. Yöneticinin öğrenciler için ayrı bir pazarlama stratejisi planlamasına gerek yoktur.

SIRA SİZDE

1. Örneklem hacmi n ≥ 30 birim olduğunda, tek anakütle ortalamasına ilişkin bir testte, hangi test istatistiği kullanılır? Nedenini açıklayınız.

2. Tek anakütle ortalamasına ilişkin bir testte, ne zaman test istatistiği kullanılır?

3. Anakütle oranına ilişkin bir testte, test istatistiğinin kullanılmasının koşulları nelerdir?

Kendimizi Sınayalım

1. İstatistik dersine ait notların ortalamasının, 80'den büyük olup olmadığı, sınanmak istenmektedir. Bu sınamada kurulacak sıfır hipotezi nedir?

a. > 80
b. = 80
c. ≠ 80
d. < 81
e. > 81

2. 0.02 anlam düzeyinde sınanan bir hipotez için, doğru olan sıfır hipotezini reddederek hatalı karar verme olasılığı kaçtır?

a. 0.01
b. 0.02
c. 0.05
d. 0.98
e. 0.99

3. Bir hipotez sınamasında red bölgesinin yönünü aşağıdakilerden hangisi belirler?

a. H_0
b. H_1
c. H_0 ve H_1
d. hatası
e. hatası

4. Bir işyerinde, her birinde 50'şer işçiden oluşan iki grup, verimlilik bakımından karşılaştırılacaktır. Tek yönlü bir hipotez sınaması yapıldığında, 0.05 olasılık düzeyinde tablodan okunacak kritik değer aşağıdakilerden hangisidir?

a. t = 2.750
b. t = 2.042
c. z = 1.960
d. z = 1.645
e. z = 1.276

5. Çift yönlü bir hipotez sınamasında t değeri 2.861 ise, örnek büyüklüğü ve anlam düzeyi aşağıdakilerin hangisinde birlikte verilmiştir?

a. 19 - 0.01
b. 19 - 0.02
c. 20 - 0.01
d. 20 - 0.02
e. 21 - 0.05

6. Normal dağılıma sahip bir ana kütlenin ortalamasının 53 olup olmadığının sınanmasında, rasgele seçilen bir örneğin ortalaması 56, standart hatanın tahmini değeri 1.3 tür. Ortalamanın dönüştüğü z değerinin sağında kalan bölgenin oranlanmış alanı kaçtır?

a. 0.0107
b. 0.4893
c. 0.4898
d. 0.5000
e. 0.9893

7 ve 8. sorular aşağıdaki bilgilere göre cevaplandırılacaktır.

Bir işletmede, üretilen ampullerin 450 saat olan dayanma süresini artırmak için, yeni bir hammaddenin kullanımı düşünülmektedir. Bu hammadde kullanılarak 1 000 ürün üretilmiş ve ortalama dayanma süresi 462 saat olarak hesaplanmıştır. Hammaddenin olumlu sonuç verip vermediği %95 güvenle sınanacaktır.

7. Bu sınamada örnekleme dağılımının red bölgesi aşağıdakilerden hangisidir?

a. Sağ uçta, %2.5 lik alan
b. Sol uçta %2.5 lik alan
c. Sağ uçta, %5 lik alan
d. Sol uçta %5 lik alan
e. Sağ uçta. %10 luk alan

8. Bu sınamadaki alternatif hipotez nedir?

a. ≠ 450
b. > 462
c. = 450
d. ≠ 462
e. > 450

9. Boyları 170 cm'den uzun olan erkeklerin ağırlık ortalamasının 72 kg olup olmadığı sınanmak istenmektedir. Bu sınamadaki sıfır hipotezi nedir?

a. ≠ 170
b. ≠ 72
c. > 170
d. = 72
e. = 170

10. Ana kütle ortalamasının 200 olup olmadığının %99 güvenle test edilmesi için seçilen 15 birimlik rassal örneklemin ortalaması 160, standart sapması 60 tır. Örnek ortalamasına karşı gelen test istatistiğinin değeri kaçtır?

a. –1
b. –1.5
c. –2
d. –2.5
e. –3

Yanıt Anahtarı

1. b
2. d
3. b
4. c
5. c
6. b
7. c
8. e
9. d
10. d

Yararlanılan Kaynaklar

CANKÜYER, Ersoy, AŞAN, Zerrin: **Parametrik Olmayan İstatistiksel Teknikler**, Anadolu Üniversitesi Yayınları, No:1266, Eskişehir, 2001.

ÇÖMLEKÇİ, Necla: **Bilimsel Araştırma Yöntemi ve İstatistiksel Anlamlılık Sınamaları**, Bilim Teknik Yayınevi, İstanbul, 2001.

FINK, Arlene: **How to Sampling in Surveys**, Sage Publications, London, 1995.

GÜRSAKAL, Necmi: **Bilgisayar Uygulamalı İstatistik I**, Marmara Kitabevi, Bursa, 1997.

HINKLE, Dennir E; WIERSMA, Williams; JURS, Stephen G: **Applied Statics For The Bhavioral Sciences**, Boston, 1998.

MALTHORA, Naresh K.: **Marketing Research An Applied Orientation,** 2nd Edition, Prentice-Hall International Inc, New Jersey, 1996.

NETER, J, WASSERMAN, W, WHITMORE, G.A.: **Applied Statistics**, Simon and Schuster, Inc, Boston, 1993.

ÖZMEN, A., ÖZDAMAR, K., ODABAŞI, Y., Hoşcan, Yaşar., BİR, A. Atıf, KIRCAALİİFTAR, G., UZUNER, Yıldız.: **Sosyal Bilimlerde Araştırma Yöntemleri**, TC. Anadolu Üniversitesi Yayınları, No:1081, Açıköğretim Fakültesi Yayınları, No: 601, Eskişehir, 1999.

PÜSKÜLCÜ, Halis, İKİZ, Fikret: **İstatistiğe Giriş,** (2. Baskı), E.Ü. Mühendislik Fakültesi Yayın No: 601, Ege Üniversitesi Basımevi, İzmir, 1986.

SERPER, Özer; Aytaç Mustafa: **Örnekleme**, Ezgi Kitabevi, Bursa, 2000.

SERPER, Özer: **Uygulamalı İstatistik II**, Filiz Kitabevi, İstanbul, 1986.

TRYFOS, Peter: **Sampling Methods for Applied Research**, John Wiley & Sons Inc., New York, 1996.

TULL, Donald S., HAWKINGS, Del I.: **Marketing Research Measurement and Method**, 6th Edition, MacMillan Publishing Company, New York, 1993.